

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.11.2025****ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА**

**1.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $H$  — ортоцентр. На окружности, построенной на  $AH$  как на диаметре, выбрали точки  $P$  и  $Q$  так, что  $M$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой. Докажите, что ортоцентр треугольника  $APQ$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**2.** Неотрицательные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  удовлетворяют при  $2 \leq i \leq 99$  условию  $\max\{a_{i-1} + a_i, a_i + a_{i+1}\} \geq i$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы всех этих чисел.

**3.** В аэропорту Шаромыжниково имеется  $10^{4050}$  выходов на посадку, расположенных в клетках квадратной таблицы  $10^{2025} \times 10^{2025}$  и пронумерованных натуральными числами от 1 до  $10^{4050}$  в каком-то порядке. Пассажир Иванов забыл номер своего выхода и помнит только, что это единственный выход, номер у которого меньше, чем у всех соседних (по стороне клетки). Он может ткнуть в произвольную клетку на электронной схеме аэропорта и узнать номер выхода в этой клетке. Однако до окончания посадки он успевает сделать это только  $10^{2026}$  раз. Успеет ли Иванов узнать, куда ему идти?

**4.** Точка  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  с наименьшей стороной  $BC$ . Точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — середины отрезков  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  соответственно. Пусть  $d(A)$ ,  $d(B)$ ,  $d(C)$  — длины отрезков касательных из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  к окружности, описанной около треугольника  $A'B'C'$ . Докажите, что  $d(A) + d(B) + d(C) \geq \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) BC$ .

**5.** Некоторые целые неотрицательные числа покрашены в зелёный цвет. Известно, что существуют два взаимно простых зелёных числа, большие единицы. Кроме того, для любых двух зелёных чисел  $a \neq 0$  и  $b$  (не обязательно различных) их произведение и остаток от деления  $b$  на  $a$  тоже зелёные. Докажите, что все целые неотрицательные числа зелёные.

**6.** Для каких натуральных  $n \geq 3$  существуют  $n$  не обязательно различных простых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$  таких, что все числа  $p_1 p_2 + 1$ ,  $p_2 p_3 + 1$ ,  $\dots$ ,  $p_{n-1} p_n + 1$  и  $p_n p_1 + 1$  являются степенями натуральных чисел с показателями, большими 1?

**7.** Найдите целую часть выражения

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6 - 1} + \sqrt{10^6} + \sqrt{10^6 + 1}}.$$

**8.** Правильный треугольник со стороной 97 разбит на правильные треугольнички со стороной 1. Можно ли узлы этого разбиения пронумеровать числами от 1 до  $49 \cdot 99$  так, что для любого  $1 \leq i \leq 49 \cdot 99 - 1$  расстояние между узлами с номерами  $i$  и  $i + 1$  равно 1, а также для любого  $1 \leq j \leq 49 \cdot 33$  расстояние между узлами с номерами  $3j - 2$  и  $3j$  равно  $\sqrt{3}$ ?

**9.** Дано натуральное число  $n > 3$ . Петя сложил из палочек стороны и диагонали правильного  $n$ -угольника. Затем он разделил все эти  $n(n - 1)/2$  палочки на группы по три палочки так, чтобы из каждой группы можно было составить треугольник. Для каких чисел  $n$  это возможно?

**10.** Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ , причём  $n/2 < k < n$ . В игре участвуют  $n$  игроков, которые ходят по очереди в циклическом порядке. Вначале на доске нарисован граф без циклов и в одной из его вершин стоит фишка. Каждым ходом очередной игрок двигает фишку по ребру в соседнюю вершину, в которой она ещё не была. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что можно так задать граф и поставить в одну из его вершин фишку, что в полученной игре любые  $k$  игроков могут заранее договориться и действовать так, чтобы ни один из них не проиграл.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.11.2025****ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $H$  — ортоцентр. На окружности, построенной на  $AH$  как на диаметре, выбрали точки  $P$  и  $Q$  так, что  $M$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой. Докажите, что ортоцентр треугольника  $APQ$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

2. Неотрицательные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  удовлетворяют при  $2 \leq i \leq 99$  условию  $\max\{a_{i-1} + a_i, a_i + a_{i+1}\} \geq i$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы всех этих чисел.

3. В аэропорту Шаромыжниково имеется  $10^{4050}$  выходов на посадку, расположенных в клетках квадратной таблицы  $10^{2025} \times 10^{2025}$  и пронумерованных натуральными числами от 1 до  $10^{4050}$  в каком-то порядке. Пассажир Иванов забыл номер своего выхода и помнит только, что это единственный выход, номер у которого меньше, чем у всех соседних (по стороне клетки). Он может ткнуть в произвольную клетку на электронной схеме аэропорта и узнать номер выхода в этой клетке. Однако до окончания посадки он успевает сделать это только  $10^{2026}$  раз. Успеет ли Иванов узнать, куда ему идти?

4. Точка  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — середины отрезков  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника  $A'B'C'$  пересекает стороны треугольника  $ABC$  не более чем в четырёх точках.

5. Некоторые целые неотрицательные числа покрашены в зелёный цвет. Известно, что числа 2 и 3 зелёные. Кроме того, для любых двух зелёных чисел  $a \neq 0$  и  $b$  (не обязательно различных) их произведение и остаток от деления  $b$  на  $a$  тоже зелёные. Докажите, что все целые неотрицательные числа зелёные.

6. Для каких натуральных  $n \geq 3$  существуют  $n$  не обязательно различных простых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$  таких, что все числа  $p_1 p_2 + 1$ ,  $p_2 p_3 + 1$ ,  $\dots$ ,  $p_{n-1} p_n + 1$  и  $p_n p_1 + 1$  являются степенями натуральных чисел с показателями, большими 1?

7. Найдите целую часть выражения

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6 - 1} + \sqrt{10^6} + \sqrt{10^6 + 1}}.$$

8. Правильный треугольник со стороной 97 разбит на правильные треугольнички со стороной 1. Можно ли узлы этого разбиения пронумеровать числами от 1 до  $49 \cdot 99$  так, что для любого  $1 \leq i \leq 49 \cdot 99 - 1$  расстояние между узлами с номерами  $i$  и  $i + 1$  равно 1, а также для любого  $1 \leq j \leq 49 \cdot 33$  расстояние между узлами с номерами  $3j - 2$  и  $3j$  равно  $\sqrt{3}$ ?

9. Дано натуральное число  $n > 3$ . Петя сложил из палочек стороны и диагонали правильного  $n$ -угольника. Затем он разделил все эти  $n(n - 1)/2$  палочки на группы по три палочки так, чтобы из каждой группы можно было составить треугольник. Для каких чисел  $n$  это возможно?

10. Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ , причём  $n/2 < k < n$ . В игре участвуют  $n$  игроков, которые ходят по очереди в циклическом порядке. Вначале на доске нарисован граф без циклов и в одной из его вершин стоит фишка. Каждым ходом очередной игрок двигает фишку по ребру в соседнюю вершину, в которой она ещё не была. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что можно так задать граф и поставить в одну из его вершин фишку, что в полученной игре любые  $k$  игроков могут заранее договориться и действовать так, чтобы ни один из них не проиграл.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.11.2025

## ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $H$  — ортоцентр. На окружности, построенной на  $AH$  как на диаметре, выбрали точки  $P$  и  $Q$  так, что  $M$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой. Докажите, что ортоцентр треугольника  $APQ$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

2. Неотрицательные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  удовлетворяют при  $2 \leq i \leq 99$  условию  $\max\{a_{i-1} + a_i, a_i + a_{i+1}\} \geq i$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы всех этих чисел.

3. Для подмножеств  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  обозначим  $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ ; для числа  $x \in \mathbb{R}$   $x + Y = \{x\} + Y = \{x + y : y \in Y\}$ .

Пусть  $B$  — множество вещественных чисел (не обязательно конечное), содержащее 0 и вместе с любым числом содержащее ему противоположное. Обозначим  $B_k = \underbrace{B + B + \dots + B}_k$ . Предположим, что для каждого  $k$  множество  $B_k$  покрывается конечным

количеством множеств вида  $a + B$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , и обозначим через  $f(k)$  наименьшее количество множеств в таком покрытии. Предположим, что  $f(k)$  постоянна при всех достаточно больших  $k$ . Докажите, что, при достаточно больших  $k$ , вместе с любыми двумя числами  $B_k$  также содержит их разность.

4. Точка  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — середины отрезков  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника  $A'B'C'$  пересекает стороны треугольника  $ABC$  не более чем в четырёх точках.

5. Некоторые целые неотрицательные числа покрашены в зелёный цвет. Известно, что числа 2 и 3 зелёные. Кроме того, для любых двух зелёных чисел  $a \neq 0$  и  $b$  (не обязательно различных) их произведение и остаток от деления  $b$  на  $a$  тоже зелёные. Докажите, что все целые неотрицательные числа зелёные.

6. Для каких натуральных  $n \geq 3$  существуют  $n$  не обязательно различных простых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n$  таких, что все числа  $p_1 p_2 + 1$ ,  $p_2 p_3 + 1$ ,  $\dots$ ,  $p_{n-1} p_n + 1$  и  $p_n p_1 + 1$  являются степенями натуральных чисел с показателями, большими 1?

7. Найдите целую часть выражения

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6 - 1} + \sqrt{10^6} + \sqrt{10^6 + 1}}.$$

8. Правильный треугольник со стороной 97 разбит на правильные треугольнички со стороной 1. Можно ли узлы этого разбиения пронумеровать числами от 1 до  $49 \cdot 99$  так, что для любого  $1 \leq i \leq 49 \cdot 99 - 1$  расстояние между узлами с номерами  $i$  и  $i + 1$  равно 1, а также для любого  $1 \leq j \leq 49 \cdot 33$  расстояние между узлами с номерами  $3j - 2$  и  $3j$  равно  $\sqrt{3}$ ?

9. Дано натуральное число  $n > 3$ . Петя сложил из палочек стороны и диагонали правильного  $n$ -угольника. Затем он разделил все эти  $n(n - 1)/2$  палочки на группы по три палочки так, чтобы из каждой группы можно было составить треугольник. Для каких чисел  $n$  это возможно?

10. Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ , причём  $n/2 < k < n$ . В игре участвуют  $n$  игроков, которые ходят по очереди в циклическом порядке. Вначале на доске нарисован граф без циклов и в одной из его вершин стоит фишка. Каждым ходом очередной игрок двигает фишку по ребру в соседнюю вершину, в которой она ещё не была. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что можно так задать граф и поставить в одну из его вершин фишку, что в полученной игре любые  $k$  игроков могут заранее договориться и действовать так, чтобы ни один из них не проиграл.